Муниципальное Бюджетное Образовательное Учреждение

«Средняя общеобразовательная школа № 45»

г. Кемерово

**Диофантовы**

**уравнения**

Работу выполнили:

Стародубцева Арина, ученица 8 класса

Маркевич Алина, ученица 8 класса

Кошкина Алёна, ученица 8 класса

Руководитель:

Мартынюк Татьяна Владимировна,

учитель математики МБОУ «СОШ № 45»

КЕМЕРОВО, 2013

**Содержание**

Введение……………………………………………………………….…2

Историческая справка …………………………………………………..4

Неопределенные уравнения первой степени вида *ax + by = c* ………7

1. Метод перебора. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .. . ……... …8

2. Метод последовательного деления (спуска) . . . . . . .. . . . . . …….12

Заключение. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .. . .. . . ……………….…. ....20

Список литературы. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .. …………21

**Введение**

Окружающий мир, потребности народного хозяйства, а зачастую, и повседневные хлопоты ставят перед человеком все новые и новые задачи, решение которых не всегда очевидно. Порою тот или иной вопрос имеет под собой множество вариантов ответа, из-за чего происходят затруднения в решении поставленных задач. Как выбрать правильный и оптимальный вариант? С этим вопросом напрямую связано решение диофантовых (неопределенных) уравнений. Диофантовы уравнения интересны и до сих пор изучаются математиками.

Диофантовы уравнения – алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые решения. Названы они по имени греческого математика Диофанта, изучавшего такие уравнения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух. Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределёнными уравнениями. Уравнения могут иметь неизвестные не только в первой степени, но и в любой другой. Да и вопросы, вытекающие из дополнительных условий, могут оказаться самыми разнообразными. Диофант положил начало новому разделу математики. Он рассматривал уравнения, которые сегодня мы записываем в виде *ах+bу=с* , где *а, b* и *с* – целые числа. Такие уравнения теперь называют «диофантовыми», раздел математики, изучающий их «диофантовым анализом», в свою очередь диофантов анализ является частью исключительно интересного раздела современной математики – теории чисел.

Обычно, произвольное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул "диофантово", если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах, т.е. найти все его решения, являющиеся целыми.Диофант интересовался решением уравнений в целых числах еще в третьем веке нашей эры и, надо сказать, делал это весьма успешно.

Решение уравнений в целых числах – один из самых красивых разделов математики. Ни один крупный математик не прошел мимо теории диофантовых уравнений. Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Чебышев оставили неизгладимый след в этой интересной теории.

Несмотря на усилия многих поколений выдающихся математиков, таких как Пифагор (VI в до н. э.), Диофант (III в), Ферма (XVII в), Эйлер (XVII в), в этой области отсутствуют общие методы решения неопределенных уравнений.

В работе рассматриваются неопределенные уравнения первой степени, т.е. уравнения вида *ах+bу=с* , где *а, b* и *с* – целые числа,; выясняются условия существования решений таких уравнений, предлагаются решения методом перебора, методом последовательного деления (спуска).

При выполнении работы были поставлены следующие **задачи**:

расширить свои знания по математике;

рассмотреть методы решения простейших неопределенных уравнений.

**Историческая справка**

******

Диофант представляет одну из наиболее трудных загадок в истории науки. Нам не известно ни время, когда он жил, ни предшественники, которые работали бы в той же области.

Промежуток времени, когда мог жить Диофант, составляют полтысячелетия! Нижняя грань определяется без труда: в своей книге о многоугольных числах Диофант неоднократно упоминает математика, который жил в середине 2-ого в. до н.э. С другой стороны, в комментариях Теона Александрийского к «Альмагесту» знаменитого астронома Птолемея помещен отрывок из сочинения Диофанта. Теон жил в середине 4-ого в.н.э. Этим определяется верхняя грань этого промежутка. Итак, 500 лет!

Французский историк науки Поль Таннри, издатель наиболее полного текста Диофанта, попытался сузить этот промежуток,он определил, что время жизни Диофанта - середина 3-го века нашей эры. Зато место жительства Диофанта хорошо известно – Александрия, центр научной мысли.

Итак, жил Диофант, по-видимому, в III в. н. э., остальные известные нам факты его биографии исчерпываются таким стихотворением-загадкой, по преданию выгравированным на его надгробии:

*Путник! Здесь прах погребён Диофанта,*

*И числа поведать могут, о чудо, сколь долг был век его жизни.*

*Часть шестую его представляло счастливое детство.*

*Двенадцатая часть протекла ещё жизни-*

*Пухом покрылся тогда подбородок.*

*Седьмую в бездетном браке провёл Диофант.*

*Прошло пятилетье.*

*Он был осчастливлен рождением прекрасного первенца сына,*

*Коему рок половину лишь жизни счастливой и светлой*

*Дал на земле по сравненью с отцом.*

*И в печали глубокой старец земного удела конец воспринял,*

*Переживши года четыре с тех пор, как сына лишился.*

*Скажи, скольких лет жизни достигнув,*

*Смерть воспринял Диофант?*

Используя современные методы решения уравнений можно сосчитать, сколько лет прожил Диофант.

Пусть Диофант прожил *x* лет. Составим и решим уравнение: 

Умножим уравнение на 84,чтобы избавиться от дробей:



Таким образом, мы узнаем, что Диофант женился в 33 года, стал отцом в 38 лет, потерял сына на 80-м году и умер в 84 года.

Наиболее загадочным представляется творчество Диофанта. В развитие учения об уравнениях Диофант внес вклад больший, чем кто-либо другой из ученых древней Греции. К сожалению, у него не было последователей, он стал последним из великих математиков древней Греции. В конце IV в. н.э. Греция подверглась опустошительному нашествию римских легионеров. Громадная Александрийская библиотека, один каталог которой насчитывал 120 томов, была уничтожена. Греческая наука пришла в упадок.

Из сочинений Диофанта до наших дней дошло два: "О многоугольных числах" и "Арифметика". Однако сохранились они не полностью. «Арифметика» Диофанта – это сборник задач (всего 189), каждая из которых снабжена решением и необходимыми пояснениями. До нас дошло шесть из тринадцати книг, которые были объединены в «Арифметику», стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебры, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, его «Данным», леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, которые остались совершенно неизвестными. Мы можем только гадать о её корнях, и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

В «Арифметике» поражает не только совершенно новый язык, не только смелое расширение области чисел, но и особенно те проблемы, которые ставит и решает Диофант. Задачи в «Арифметике» Диофанта тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определенных, строго продуманных методах. Как это было принято в древности, методы не формулируются в общем виде, а повторяются для решения однотипных задач.

**Неопределённые уравнения 1-ой степени**

**вида *ax + by = c.***

Существуют разные степени неопределенных уравнений, и чем

выше степень, тем более сложным является решение неопределенного уравнения. Долгое время надеялись найти общий способ решения диофантовых уравнений. Однако в 1970г. ленинградский математик Матиясевич доказал, что такого общего способа быть не может. Мы рассмотрим неопределенные

уравнения I-ой степени вида *ax + by = с.*

Общеизвестно, что графиком линейного уравнения с двумя неизвестными ах+bу=с является прямая линия. Координаты каждой точки этой прямой - решение данного уравнения. Таким образом, оно имеет бесконечное множество решений. Поэтому уравнение с несколькими переменными называется **неопределенным.**

Уравнение вида *ax+by=c* является одним из простейших неопределенных уравнений I-ой степени, но несмотря на это, решить такое уравнение весьма не просто.

Рассмотрим два метода решения неопределенных уравнений вида *ax+by=c:* метод перебора и метод «спуска».

**1.Метод перебора.**

Метод перебора включает в себя перебор чисел вместо переменных  *х* и *у,* с учетом, что уравнение при определенном подборе чисел обращается в верное равенство.

**Пример 1**. Рассмотрим уравнение:  *4,5х + 6у = 57.*

Нужно найти все натуральные значения переменных *х и у.*

Решение:

Умножим обе части уравнения на 2, чтобы избавиться от дробных чисел, получим: *9х + 12у = 114.*

Выразим *x* через *y:*

Далее воспользуемся методом перебора (учитывая, что *у * N):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *y* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *x* | 11,(3) | 10 | 8,(6) | 7,(3) | 6 | 4,(6) | 3,(3) | 2 | 0,(6) |

Таким образом, подставляя вместо *y* натуральные числа, получили соответствующие значения *x* (причем *х* и *у*  N). Выбираем Таким образом, задача имеет три решения : (2;8), (6;5), (10,2).

**Пример 2**. В клетке сидят кролики и фазаны, всего у них 18 ног. Узнать, сколько в клетке тех и других?

Решение:

Составим уравнение с двумя неизвестными переменными, в котором х – число кроликов. у – число фазанов:

4х + 2у = 18, или 2х + у = 9.

Выразим у через х: у = 9 – 2х.

Далее воспользуемся методом перебора:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 1 | 2 | 3 | 4 |
| у | 7 | 5 | 3 | 1 |

Таким образом, задача имеет четыре решения: (1;7), (2;5), (3;3), (4;1).

**Пример 3**. Кусок проволоки длиной 102 м нужно разрезать на части длиной 15м и 12м так, чтобы была использована вся проволока. Как это сделать?

Решение:

Пусть х - количество частей проволоки длиной 15м, у – количество частей проволоки длиной 12м. Тогда 15х+12у = 102,

или 5х+4у = 34,

Выразим у через х: .

Очевидно, что х и у – натуральные числа. Придавая х последовательно значения 1, 2, 3, … , находим соответствующие значения у:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 7,25 | 6 | 4,75 | 3,5 | 2,25 | 1 |

При других значениях х, у уже не будет натуральным числом. Выбираем . Задача имеет два решения: (2;6) и (6;1).

**Пример 4**. Коле в 1987 году было столько лет, какова сумма цифр года его рождения. В каком году он родился?

Решение:

Пусть Коля родился в году, тогда в 1987 году ему было 1987- лет. Сумма цифр года его рождения: 1+9+х+у. Согласно условию задачи имеем уравнение:

1987-(1900+10х+у) = 1+9+х+у.

87-10х-у = 10+х+у,

77-11х = 2у,

Выразим у через х:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| y | 38,5 | 33 | 27,5 | 22 | 16,5 | 11 | 5,5 | 0 |

Учитывая, что х и у цифры десятичной системы счисления, подбором найдем единственное решение: х=7, у=0. Таким образом, Коля родился в 1970 году.

**Пример 5**. Найти двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

Решение:

Обозначим искомое число как , тогда *х= -*,

х = 10х+у(10у+х),

х =9х 9у ,

9у=8х , .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| y | 0 | 8/9 | 1,(7) | 2,(6) | 3,(5) | 4,(4) | 5,(3) | 6,(2) | 7,(1) | 8 |

Так как х и у цифры, то единственное решение этого уравнения: х = 9; у = 8. Искомое число 98.

**Пример 6**. Трехзначное число оканчивается цифрой 7. Если переставить эту цифру на первое место, то получится число в 2 раза и еще на 21 единицу больше первоначального. Определите это число.

Решение:

Обозначим количество сотен числа через х, а количество десятков через у. Тогда искомое число запишется в виде =100x+10y+7. После перенесения цифры 7 на первое место получим число =700+10х+у. Составим уравнение согласно условию задачи:

700+10х+у = 2(100х +10у +7) + 21.

После упрощения уравнения получим: 10х+ у=35

Выразим у через х: у = 35-10х.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 35 | 25 | 15 | 5 |

Но х и у цифры, значит единственным решением уравнения являются х=3 и у=5. Искомое число 357.

**Пример 7**. Если между цифрами двузначного числа вписать двузначное число, на 1 меньше первоначального, то полученное число будет в 91 раз больше первоначального. Найдите это число.

Решение:

Пусть *=10x+у* первоначальное число, тогда вновь полученное число.

= 1000х+100х+10(у1)+у=1100x+11y10

По условию задачи полученное число в 91 раз больше первоначального, поэтому: 1100x+11y10 = 91(10х+у)

190х-80у = 10 ; 19х-8у = 1

Выразим у через х:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | -0,125 | 2,25 | 4,625 | 7 | 9,375 | 11,75 |

Так как х и у цифры, значит единственным решением уравнения являются х = 3, у = 7. Искомое число 37.

**2.Метод «спуска».**

Перебор вариантов при решении уравнения в целых числах часто оказывается весьма трудоемким. Поэтому рассмотрим еще один старинный прием – метод «спуска» (или метод рассеивания). Таким методом решения диофантовых уравнений I-ой степени с целыми коэффициентами занимались еще в Древней Индии. Этим способом и в наше время решают такие уравнения.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение *19х – 8у = 13* (1). Требуется найти все целые решения данного уравнения.

Решение:

Выражая *у* (неизвестное с наименьшим по модулю коэффициентом) через *х*  получим:  (2).

Теперь нам нужно выяснить, при каких целых значениях *х* соответствующие значения *у* также являются целыми числами. То есть, выделив целую часть, запишем уравнение (2) следующим образом:  (3).

Из уравнения (3) следует, что *у* при целом значении  *х* будет иметь целое значение только в том случае, если выражение  также будет иметь целое значение, заменим это выражение на *z* (*z  *).

Значит,  (4)

Уравнение (4) с двумя неизвестными  *х* и *z*  можно записать так: 3*x –* 8*z* = 13 (5).

Продолжая тем же способом, из уравнения (5) получим:  (6).

Получается, неизвестное *х* принимает целое значение при целом  *z* тогда, когда  будет принимать целое значение. Пусть это выражение равно *p* (*p*), получим:  (7) или  (8).

Далее:  (9).

Аналогично  должно быть целым числом, подставим вместо этого выражения  *q* (*q )*, получаем:

 (10),

преобразуем  (11).

Из уравнения (11) получаем:  (12).

Заметим, что при любых значениях переменной *q* переменная *p* будет принимать целые значения. «Спуск» закончен.

Из равенств (3), (6), (9), (12) при помощи последовательных подстановок находим следующие выражения для неизвестных *х* и  *у*  уравнения (1):

Подставив (12) в (9), получим:

(13)

Подставив (13) в (6), получим:

(14)

Подставив (14) в (3), получим:

Таким образом, формулы: , 

при *q =*0,  , , … дают все целые решения уравнения (1).

Далее приведены примеры таких решений:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *q* | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *x* | 7 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 55 | 63 | 71 |
| *y* | 15 | 34 | 53 | 72 | 91 | 110 | 129 | 148 | 167 |

**Пример 2.** Решить уравнение первой степени 7х-11у=36 в целых числах.

Решение:

Выберем неизвестное, имеющее наименьший по модулю коэффициент, и выразим его через другое неизвестное:

Далее, из полученной дроби выделим целую часть:

(1)

Число х будет целым, если целым окажется значение дроби. А для этого необходимо, чтобы 1+4у было кратно 7. Пусть т.е. 1+4у=7z, где z- целое число.

Мы получили новое уравнение с двумя переменными, коэффициенты которого по модулю меньше коэффициентов первоначального уравнения.

Решать его теперь нужно относительно переменных у и z. Действуя по этому же принципу, выразим переменную у через z :

(2)

Для того, чтобы у оказалось целым, необходимо чтобы 3z-1 без остатка делилось на 4. Пусть = u, т.е. необходимо, чтобы выполнялось условие 3z-1=4u, где u - целое число. Отсюда уже по отработанной схеме из 3z-1=4u получаем

(3)

Число z будет целым, если число u+1 будет кратно 3. Пусть = t. Отсюда u+1=3t , где t- целое число. Выразим переменную u через t: u=3t-1 (4)

Дробей больше нет. «Спуск» закончен, будем «подниматься вверх».

Выразим через переменную t сначала z, подставив (4) в (3):

(5)

Потом выразим через t переменную у, подставив (5) в (2):

(6)

И, наконец, выразим х через t, подставив (4) в (3):

Таким образом, х=11t+2, у= 7t-2.

Полученный результат можно проверить с помощью его подстановки в исходное уравнение:

7(11t+2)-11(7t-2)=36 при любом t.

Придавая переменной t целые значения, получим целые решения исходного уравнения. Понятно, что их будет бесконечное множество.

Если же нас заинтересуют натуральные решения, то наложим дополнительное условие 7t-2>0 и 11t+2>0.

Если записать решения в виде х=2+11t, у=-2+7t и заметить, что пара (2;-2) - решение уравнения при t=0, то можно увидеть их связь с коэффициентами а и b. И действительно, есть теорема, которая утверждает, что если () какое-либо решение уравнения *ах+bу=с*, то все его решения задаются формулами: x=+bt, y=-аt (t- любое целое число).

**Пример 3.** Решите в целых числах уравнение 60х – 77у = 1.

Решение:

Разрешим это уравнение относительно х:

(1)

Пусть z = ,

тогда (2)

Если обозначить через t, то (3)

Пусть , тогда t = (4)

Наконец, пусть , тогда (5)

Так как мы находим только целые решения уравнения, то помним, что *z, t,* *n* и *p* должны быть целыми числами.

Дробей больше нет. «Спуск» закончен, будем «подниматься вверх».

Выразим через переменную p сначала t, подставив (5) в (4):

Получим, + (6)

Подставим теперь (6) в (3):

Получим, = + + (7)

Подставим теперь (7) в (2):

=3(

(8)

Подставим теперь (8) в (1):

(9)

Таким образом, и .

Проверка показывает, что они удовлетворяют исходному уравнению.

Придавая переменной p целые значения, получим целые решения исходного уравнения. Понятно, что их будет бесконечное множество.

**Пример 4.** Подданные привезли в дар шаху 300 драгоценных камней: в маленьких шкатулках по 15 штук в каждой и в больших – по 40 штук. Сколько было тех и других шкатулок, если известно, что маленьких было меньше, чем больших?

Решение:

Обозначим за *x* количество маленьких шкатулок, а за *y* – количество больших: *15x+40y=300*

Сокращаем на 5: *3x+8y=60*

Выражаем переменную *х*:

Выделив целую часть, получим:

Чтобы значение дроби было целым числом , надо, чтобы 2y было кратно 3, т.е.: 2y=3z

Выразим переменную у и выделим целую часть:

Потребуем, чтобы z было кратно 2: z=2u . «Спуск» закончен.

Теперь выразим переменные x и y через u:

Т. е.

Т. е.  *x*

Составим и решим систему неравенств:

Выпишем целые решения: u=1; 2;

Теперь найдем значения x и y при u =1; 2;

Приu=1: *x=*

При u=2:  *x=*

Так как y>x ответом будет : 4 маленькие шкатулки и 6 больших шкатулок.

Принимаясь за поиски решения неопределённого уравнения, мы предполагали, что целочисленное решение у него непременно есть. Но всегда ли возможно решить уравнение вида *ax + by = c* в целых числах?

Отметим, что если коэффициенты *а, b* и *с* неопределенного уравнения имеют общим множителем некоторое целое число, отличное от 1, то на него можно разделить обе части уравнения. Поэтому будем считать что *а,b* и *c* числа взаимно простые.

Заметим так же, что если коэффициенты при х и у имеют общий множитель, которого не имеет свободный член с, то уравнение не может иметь целых решений. Например, уравнение 35х20у=14 не имеет решения в целых числах (а тем более в натуральных). Так как, если допустить, что х и у целые числа, то 35х20у делилось бы на 5 , тогда как правая часть уравнения число 14 не делится на 5. Другими словами, 14 не делится на нод (35; 20)

Еще одно замечание. Уравнение лучше решать относительно неизвестного, коэффициент при котором меньше по модулю. В этом случае будет выполнено наименьшее количество проб.

При выполнении работы ,на конкретных примерах я убедилась в том, что:

1)Если свободный член с неопределенного уравнения ax + by = c не делится на НОД (a, b), то уравнение не имеет целых корней. Так же верно и следующее утверждение: если число с делится на нод (а; b), то уравнение ах+bу=с имеет целые решения.

2)Если коэффициенты a, b являются взаимно простыми

числами, то уравнение имеет, по крайней мере, одно целое решение.

3)Неопределенное уравнение *ax + by = c*, в котором *a, b* – взаимно простые числа допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами:

*x = λ + bt , y = β – at,* где *(λ, β)* – некоторые решения уравнения, a  *t* принадлежит множеству целых чисел.

**Заключение**

Диофантовы уравнения это актуальная и в наше время тема, т. к. решение уравнений, неравенств, задач, сводящихся к решению уравнений в целых числах с помощью оценок для переменных, встречается в различных математических сборниках и сборниках ЕГЭ. А ведь именно Диофант положил начало этому математическому разделу. И в этом его большая заслуга.

История методов Диофанта растягивается еще на несколько сотен лет, переплетаясь с развитием теории алгебраических функций и алгебраической геометрии. Развитие идей Диофанта можно проследить вплоть до работ Анри Пуанкаре и Андре Вейля.

Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры. Поэтому история диафантова анализа показалась нам особенно интересной. С помощью неопределенных уравнений разрешаются проблемы, встающие у нас на пути.

Умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, а в практической деятельности значительно сэкономить затраты средств и времени.

В заключительной части работы особенно хотелось подчеркнуть, что изучив специальную литературу, посвященную диафантовым уравнениям, мы расширили свои математические навыки и получили дополнительные знания о самом Диофанте, его последователях, а также о влиянии его научных трудов на дальнейшее развитие научной математической мысли.

В этой работе рассмотрено простейшее из диофантовых уравнений уравнение первой степени с двумя неизвестными. Предложенные способы их решения не являются исчерпывающим. Мы планируем дальше заниматься изучением данной темы.

**Список используемой литературы:**

1) А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах (Серия

«Популярные лекции по математике»). – М.: Наука, 1983.

2) А. П.Савин .Энциклопедический словарь юного

математика.М.: Педагогика,1985. – 352 с.

3) Гусев, В. А., Мордкович , А. Г. Математика : справочные

материалы: книга для учащихся В. А. Гусев , А. Г. Мордкович –

М.: Просвещение, 1988.- 416 с.

4) Е. Г. Галкин .Нестандартные задачи по математике: Задачи логического характера: Кн. Для учащихся 5-11 кл.: Просвещение;Уч. Лит-ра.1996.-160 с.

5) В. И. Нечаев. Простейшие неопределенные уравнения. Детская энциклопедия, т. 3 (1-е изд.), т. 2 (2-е изд.).